Projection sur un convexe fermé

CloudSea

Cadre

Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé de H
On montre que pour tout $x \in H$, il existe un unique $y_0 \in C$ qui réalise la distance de x à C
y_0 est caractérisé par

$$\forall y \in C, \mathrm{Re}\big(\langle x - y_0, y - y_0 \rangle \big) \leq 0$$

Recasages :
- [[205 Espaces complets]]
- [[208 Espaces vectoriels normés]]
- [[213 Espaces de Hilbert]]
- [[219 Extremums]]
- [[253 Convexité en analyse]]

Référence : Skandalis Topologie analyse 3e année

Déroulé du développement

Lemme : Soit (A_n) une suite décroissante de fermés non vides d'un espace complet dont le diamètre tend vers 0, alors l'intersection A des A_n est réduite à un point

Soit (x_n) une suite de X telle que pour tout n on a $x_n \in A_n$
Pour $n, p \in \mathbb{N}$, par décroissance de (A_n) on a $x_n, x_p \in A_{\max(n,p)}$, donc $\|x_n - x_p\| \leq \delta(A_{\max(n,p)}) \to 0$, donc (x_n) est de Cauchy
Donc par complétude de X, (x_n) admet une limite x
Soit $n \in \mathbb{N}$, x est limite de la suite $(x_{n+p})_p$ qui est une suite de A_n. Donc comme A_n est fermé, on a $x \in A_n$. Donc $x \in A$, donc A est non vide

Et si $x, y \in A$, on a $d(x,y) \leq \delta(A_n)$ pour tout n, donc $d(x,y) = 0$ donc $x = y$
Donc A est bien réduit à un point

Montrer le théorème

Soit $d = d(x, C)$ et $y, z \in C$, posons $b = x - \frac{1}{2}(y+z)$ et $c = \frac{1}{2}(y-z)$
Par convexité de C, on a $\frac{1}{2}(y+z) \in C$ donc $\|b\| \geq d$
Et on a $x - y = b - c$ et $x - z = b + c$, donc par l'identité du parallélogramme, on a

$$\|x-y\|^2 + \|x-z\|^2 = \|b+c\|^2 + \|b-c\|^2 = 2(\|b\|^2 + \|c\|^2) \geq 2d^2 + \frac{1}{2}\|y-z\|^2$$

Donc

$$\|y-z\|^2 \leq 2(\|x-y\|^2 - d^2) + 2(\|x-z\|^2 - d^2)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $C_n = \{y \in C, \|x-y\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\}$
Pour $y, z \in C_n$, l'inégalité précédente donne donc

$$\|y-z\| \leq \sqrt{4\left(d^2 + \frac{1}{n} - d^2\right)} = \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Donc le diamètre de C_n tend vers 0
Donc l'intersection des C_n à savoir $\{y \in C, \|x-y\| = d\}$ ne contient qu'un seul point y_0

Faire la caractérisation

Soit $y \in C$, pour $t \in [0,1]$ on a $y_0 + t(y - y_0) \in C$, donc $\|y_0 + t(y-y_0) - x\| \geq d$
Soit

$$\varphi(t) = \|y_0 + t(y-y_0) - x\|^2 = \|y_0 - x\|^2 + 2t\ \mathrm{Re}\big(\langle y_0 - x, y - y_0\rangle\big) + t^2\|y-y_0\|^2$$

On a $\varphi(0) = d^2$ et $\varphi(t) \geq \varphi(0)$ pour tout $t \in [0,1]$ par convexité de C
Donc φ est croissante au voisinage de 0
Donc comme φ est polynomiale, elle est dérivable, et donc $\varphi'(0) \geq 0$
Donc $2\ \mathrm{Re}\big(\langle y_0 - x, y - y_0\rangle\big) \geq 0$ ce qui donne bien $\mathrm{Re}\big(\langle x - y_0, y - y_0\rangle\big) \leq 0$

Et si y_0' vérifie la caractérisation, on a $\langle x - y_0, y_0' - y_0\rangle \leq 0$ et $\langle y_0' - x, y_0' - y_0\rangle \leq 0$
En sommant les deux, on obtient $\|y_0' - y_0\|^2 = 0$ donc $y_0 = y_0'$

Version révisions

Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé de H
On se propose de montrer que pour tout $x \in H$, il existe un unique $y_0 \in C$ qui réalise la distance de x à C, et que y_0 est caractérisé par

$$\forall y \in C, \mathrm{Re}\big(\, \langle x - y_0, y - y_0 \rangle \,\big) \leq 0$$

1. Montrer un premier lemme : Soit (A_n) une suite décroissante de fermés non vides d'un espace complet dont le diamètre tend vers 0, alors l'intersection A des A_n est réduite à un point
2. Soient $y, z \in C$, en considérant $b = x - \frac{1}{2}(y+z)$ et $c = \frac{1}{2}(y-z)$, montrer que

$$\|x-y\|^2 + \|x-z\|^2 \geq 2d^2 + \frac{1}{2}\|y-z\|^2$$

3. On défini $C_n = \{y \in C, \|x-y\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}\}$, montrer que C_n est de diamètre inférieur à $2/\sqrt{n}$
4. En déduire l'existence et l'unicité de y_0
5. En montrant que $\varphi(t) = \|y_0 + t(y - y_0) - x\|^2$ est croissante sur $[0,1]$, montrer que y_0 vérifie la caractérisation
6. Montrer y_0 est le seul à la vérifier